ED Formelsammlung

Maxwell'sche Gleichungen: (i) $\operatorname{rot}\vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ bzw. $\oint_C \vec{H}\,d\vec{s} = \int_A \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right)\cdot d\vec{A}$ (Durchflutungsgesetz) (ii) $\operatorname{div}\vec{B} = 0$ bzw. $\oint_A \vec{B}\,d\vec{A} = 0$ (Quellenfreiheit)

(iii) $\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ bzw. $\oint_C \vec{E}\,d\vec{s} = -\int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{A}$ (Induktionsgesetz) (iv) $\operatorname{div}\vec{D} = \rho$ bzw. $\oint_A \vec{D}\,d\vec{A} = \int_V \rho\,dV$ (Gauß'sches Gesetz)

Materialbeziehungen: $\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}$ (in linearen Dielektrika: $\vec{P} = \varepsilon_0 \chi \cdot \vec{E} \Rightarrow \vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E}$)

$\vec{B} = \mu_0\vec{H} + \vec{M}$ (in linearen magnet. Material: $\vec{M} = \mu_0 \chi_m \cdot \vec{H} \Rightarrow \vec{B} = \mu_0 \mu_r \cdot \vec{H}$)

Ohm'sches Gesetz: $\vec{j} = \kappa \cdot \vec{E}$

Randbedingungen: $\vec{E}_{t_1} = \vec{E}_{t_2}$ $\quad \vec{n}_{12} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{K}$ $\quad (\vec{j}_2 - \vec{j}_1)\cdot\vec{n}_{12} = -\frac{\partial \sigma}{\partial t}$

$(\vec{D}_2 - \vec{D}_1)\cdot\vec{n}_{12} = \sigma_{\text{freie}}$ $\quad B_{n_1} = B_{n_2}$ $\quad \varphi_1 = \varphi_2$

Potentiale: $\vec{E} = -\operatorname{grad}\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ $\quad$ Coulomb-Eichung: $\operatorname{div}\vec{A} = 0$ $\quad$ Lorentz-Eichung: $\operatorname{div}\vec{A} = -\varepsilon\mu\frac{\partial \varphi}{\partial t}$

$\vec{B} = \operatorname{rot}\vec{A}$

Randbed.: $\varphi_1 = \varphi_2$, $\vec{A}_1 = \vec{A}_2$

Sonderfälle: $\operatorname{rot}\vec{E} = \vec{0} \Rightarrow \vec{E} = -\operatorname{grad}\varphi$ bzw. $\varphi(\vec{r}) = \varphi(\vec{r}_0) - \int_{P(r_0)}^{P(r)} \vec{E}(r)\,d\vec{r}$

$\operatorname{rot}\vec{H} = \vec{0} \Rightarrow \vec{H} = -\operatorname{grad}\Psi$

Kräfte: Coulomb: $\vec{F} = \frac{Q_1 \cdot Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_{12}^2}\cdot\frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}}$ $\quad$ Elektr. Kraft: $\vec{F}(\vec{r}) = Q\cdot\vec{E}(\vec{r})$ $\quad$ Lorentzkraft: $\vec{F} = Q\cdot\vec{v}\times\vec{B} \rightarrow \vec{E}_i = \vec{v}\times\vec{B}$

$d\vec{F} = I\cdot d\vec{s}\times\vec{B}$

Energie: Ladungsverteilung: $W = \frac{1}{2}\int_V \rho(\vec{r})\varphi(\vec{r})\,dV'$ $\quad$ Strom: $W = \frac{1}{2}\int_V \vec{A}(\vec{r})\cdot\vec{j}(\vec{r})\,dV'$ $\quad$ Feldenergie: $W = \frac{1}{2}\int_V \vec{E}(\vec{r})\cdot\vec{D}(\vec{r})\,dV'$

Verlustleistung: $P = \int_V \vec{E}\cdot\vec{j}\,dV = \int \frac{|I|^2}{\kappa}dV$ $\left(R = \frac{P}{I^2}\right)$ $\quad$ $W = \frac{1}{2}\int \vec{A}\cdot\vec{j}\,dV$

$W = \frac{1}{2}\int \vec{H}(\vec{r})\cdot\vec{B}(\vec{r})\,dV'$

Quellen: Raumladungsdichte: $\rho = \frac{dQ}{dV}$ $\quad$ Volumenstromdichte: $\vec{j} = \rho\cdot\vec{v}$ $\quad$ Polarisation: $\vec{P} = \frac{d\vec{p}}{dV}$

Flächenladungsdichte: $\sigma = \frac{dQ}{dA}$ $\quad$ Flächenstromdichte: $\vec{k} = \sigma\cdot\vec{v}$ $\quad$ Magnetisierung: $\vec{M} = \frac{d\vec{m}}{dV}$

Linienladungsdichte: $\eta = \frac{dQ}{d\ell}$

Felder von Quellen: Elektr. Feldstärke einer Punktladung: $\vec{E}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}$

$\Rightarrow$ Ladungsverteilung: $\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\int_V \rho(\vec{r}')\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}dV' + \int_O \sigma(\vec{r}')\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}dA' + \int_C \eta(\vec{r}')\cdot\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}d\ell'\right)$

$\Rightarrow \varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\int_V \rho(\vec{r}')\cdot\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}dV' + \int_O \sigma(\vec{r}')\cdot\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}dA' + \int_C \eta(\vec{r}')\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}d\ell'\right)$

Potential einer Stromdichte: $\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\left(\int_V \vec{j}(\vec{r}')\cdot\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}dV' + \int_O \vec{k}(\vec{r}')\cdot\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}dA'\right)$

$\Rightarrow$ zeitabhängige Raumladungsdichte: $\varphi(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \rho\left(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}\right)\cdot\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}dV'$

$\Rightarrow$ zeitabhängige Volumenstromdichte: $\vec{B}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \vec{j}\left(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}\right)\cdot\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}dV'$

Biot-Savart: $\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \vec{j}(\vec{r}')\times\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}dV'$

$\vec{B}(\vec{r}) = -\frac{\mu_0 \cdot I}{4\pi}\oint_C \frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}\times d\vec{s}$

Dipole: elektr.: $\vec{p} = Q(\vec{r}_+ - \vec{r}_-)$ $\quad p = Q\cdot d$

$\varphi(\vec{r}) = \frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$

magnet.: $\vec{m} = \mu_0 \cdot I\cdot\vec{a}$

$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\vec{m}\times\vec{r}}{4\pi r^3}$

Hertz: $\vec{p}(t) = Q(t)\cdot\vec{\ell}$

$\vec{B}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\dot{I}_0\cdot\vec{\ell}}{r}e^{i(\omega t - kr)}$

DGL's: Poisson: $\Delta\varphi(\vec{r}) = -\frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon}$ $\quad \Delta\vec{A}(\vec{r}) = -\mu_0\cdot\vec{j}(\vec{r})$

Diffusion: $\Delta\vec{B}(\vec{r}) - \mu\kappa\frac{\partial\vec{B}(\vec{r})}{\partial t} = \vec{0}$ $\quad \Delta\vec{E}(\vec{r}) - \mu\kappa\frac{\partial\vec{E}(\vec{r})}{\partial t} = \vec{0}$ $\quad \Delta\vec{j}(\vec{r}) - \mu\kappa\frac{\partial\vec{j}(\vec{r})}{\partial t} = \vec{0}$

Wellengl.: $\Delta\vec{E}(\vec{r}) - \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{E}(\vec{r}) - \mu\kappa\frac{\partial\vec{E}(\vec{r})}{\partial t} - \mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{E}(\vec{r})}{\partial t^2} = 0$

$\Delta\vec{H}(\vec{r}) - \mu\kappa\frac{\partial\vec{H}(\vec{r})}{\partial t} - \mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{H}(\vec{r})}{\partial t^2} = 0$

$\Delta\vec{A}(\vec{r}) - \mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{A}(\vec{r})}{\partial t^2} = -\mu\cdot\vec{j}(\vec{r})$

$\Delta\varphi(\vec{r}) - \mu\varepsilon\frac{\partial^2\varphi(\vec{r})}{\partial t^2} = -\frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon}$

Fluss: elektr.: $\Omega = \int_O \vec{D}\,d\vec{A}$ $\quad$ magnet.: $\Phi = \int_O \vec{B}\,d\vec{A}$

Elektr. Strom: $I = \int_O \vec{j}\,d\vec{A}$

Kontinuitätsgl.: $\operatorname{div}\vec{j} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$

Verlustleistung: $P = \int_V \vec{E}(\vec{r})\cdot\vec{j}(\vec{r})\,dV'$

Kapazität: $C = \frac{|Q|}{|U|}$ (Kapazität) ; $W = \frac{1}{2}CU^2$

Potentialkoeff.: $\varphi_i = \sum_{j=1}^{n} p_{ij}Q_j$ mit $p_{ii} = \frac{1}{Q_i\cdot Q_i}\oint_{O_i}\oint_{O_i}\frac{\sigma_i\cdot\sigma_i}{4\pi\varepsilon_0 r_{ij}}dA_i\,dA_i$

Influenzkoeff.: $Q_i = \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\cdot\varphi_j$

Kapazitätskoeff.: $C_{ii} = \sum_{j=1}^{n} c_{ij}$ $\quad C_{ij} = -c_{ij}$ $(i\neq j)$

Induktivität: $\Phi = L\cdot I \Rightarrow L = \frac{|\Phi|}{|I|}$ $\quad$ Koeff.: $\Phi_i = \sum_{j=1}^{n} L_{ij}\cdot I_j$

mit $L_{ij} = \frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{C_i}\oint_{C_j}\frac{d\vec{s}_i\,d\vec{s}_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}$

Energie mehrer Leiter: $W = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} L_{ij}I_jI_j$

Flussverkettung: $\Psi = \mu\cdot\Phi$

$L_{12} = \frac{\Psi_{12}}{I_1} = \frac{N_2\Phi_2}{I_1} = \frac{N_2}{I_1}\int_{A_2}\vec{B}_1\,d\vec{A}_2$

Wellen: $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$ (Ausbreitungsgeschw.) $\quad$ Poynting-Vektor: $\vec{S} = \vec{E}\times\vec{H}$

$\tilde{c} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$ (Wellenwiderstand)

$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$ (Kreisfrequenz)

$\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda}\cdot\vec{e}_k$ (Wellenzahl)

$k = \frac{\omega}{c}$ (Dispersion)

$v_{ph} = \frac{\omega(k)}{k}$ (Phasengeschw.)

$v_{Gr} = \frac{\partial\omega(k)}{\partial k}$ (Gruppengeschw.)

Ebene Welle: $\vec{H} = \frac{1}{\tilde{c}}\vec{e}_k\times\vec{E}$ $\quad \vec{e}_k = \frac{\vec{E}\times\vec{H}}{|\vec{E}\times\vec{H}|}$

komplexe Wellengleichung & Maxwellgl.: $\operatorname{rot}\vec{H} = j\omega\varepsilon\vec{E}$; $\operatorname{rot}\vec{E} = -j\omega\mu_0\vec{H}$

$\operatorname{div}\vec{H} = 0$; $\operatorname{div}\vec{E} = 0$

(∂_x div rot $\neq 0$)

$\Delta\vec{H} + \omega^2\varepsilon\mu_0\vec{H} = 0$

$\Delta\vec{E} + \omega^2\varepsilon\mu_0\vec{E} = 0$

$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$ $\quad$ rot rot = grad div $-\Delta$

Polarisationsladungen: $\rho_p(\vec{r}) = -\operatorname{div}\vec{P}(\vec{r})$ $\quad$ Fiktive magnet. Ladungen: $\rho_m(\vec{r}) = -\operatorname{div}\vec{M}(\vec{r})$

$\sigma_p(\vec{r}) = \vec{P}(\vec{r})\cdot\vec{n}$ $\quad \sigma_m(\vec{r}) = \vec{M}(\vec{r})\cdot\vec{n}$

Magnetisierungsstromdichte: $\vec{j}_m(\vec{r}) = \frac{1}{\mu_0}\operatorname{rot}\vec{M}(\vec{r})$ $\quad \vec{P} = (\varepsilon_r - \varepsilon_0)\cdot\vec{E}$

$\vec{k}_m(\vec{r}) = \frac{1}{\mu_0}\vec{M}(\vec{r})\times\vec{n}$ $\quad \vec{M} = \left(\frac{\mu_r}{\mu_0} - \mu_0\right)\cdot\vec{H}$

Integralsätze: $\oint_O \vec{D}\cdot d\vec{n} = \int_V \operatorname{div}\vec{D}\,dV$ (Gauß) $\quad \int_V (\psi\,\Delta\Phi + \operatorname{grad}\psi\,\operatorname{grad}\Phi)\,dV$

$= \oint_O \psi\,\operatorname{grad}\Phi\,d\vec{n}$ (1. Greensche Satz)

$\vec{v} = \vec{\omega}\times\vec{r}$ $\quad \oint_C \vec{E}\,d\vec{s} = \int_O \operatorname{rot}\vec{E}\cdot d\vec{A}$ (Stokes)